SUJET DE SPÉ. MATHÉMATIQUES BAC GÉNÉRAL 2024 MÉTROPOLE

Exercice 1

Affirmation 1 : VRAIE

Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 5x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = +\infty$

par multiplication des limites on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$f(x) = 5xe^{-x} = -5 \times (-xe^{-x})$.

On pose $X = -x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -5 \lim_{X \to -\infty} Xe^{X}$$

Or d'après le théorème des croissances comparées apprise en cours :

$$\lim_{X \to -\infty} Xe^{X} = 0$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -5 \times 0 = 0$$

On a la limite de f(x) qui est égale à un nombre réel en l'infini alors elle admet une asymptote horizontale d'équation y=0 en $+\infty$.

Affirmation 2 : VRAIE

Déterminons la dérivée de $f(x)$:
$f(x) = 5xe^{-x} = u(x) \times v(x)$ en posant
$u(x) = 5x$ qui donne $u'(x) = 5$ et
$v(x) = e^{-x}$ qui donne $v'(x) = -e^{-x}$

Alors $f'(x) = u'v + uv' = 5e^{-x} + 5x\,(-e^{-x}) = 5e^{-x} - 5xe^{-x}$.

On remplace $f(x)$ et $f'(x)$:
$f'+f = 5e^{-x} - 5xe^{-x} + 5xe^{-x} = 5e^{-x}$.
Donc $f(x)$ est bien solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation 3 : FAUX

Contre-exemple : La suite définie par $v_n = u_n$ si n est pair et $v_n = w_n$ si n est impair vérifie la condition $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout entier n mais ne converge pas.

Contre-exemple : $v_n = (-1)^n$ est une suite dont tous les termes appartiennent à l'intervalle [-1 ; 1], et pourtant elle n'est pas convergente.

Affirmation 4 : VRAIE

Si (u_n) est croissante alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n$.
Si (w_n) est croissante alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_0 \leq w_n$.
On a alors l'inégalité suivante pour tout entier n :
$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq w_0$.
En particulier, $u_0 \leq v_n \leq w_0$

Suite du corrigé à venir