SUJET DE SPÉ. MATHÉMATIQUES BAC GÉNÉRAL 2024 LIBAN/ALGÉRIE

Exercice 1

Partie A

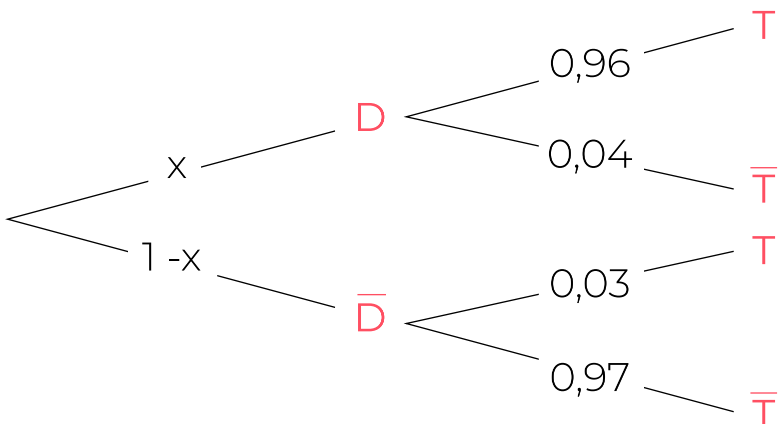
1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle [0;1] comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.
Pour tout réel $x \in [0;1]$, on note $u(x) = 0,96x$ et $v(x) = 0,93x + 0,03$.
Alors $u'(x) = 0,96$ et $v'(x) = 0,93$.
Donc, pour tout réel $x \in [0;1]$, $f'(x) = \dfrac{0,96 \times (0,93x + 0,03) - 0,96x \times 0,93}{(0,93x + 0,03)^2}$

$$f'(x) = \frac{0,96 \times 0,93x + 0,0288 - 0,96x \times 0,93 \times x}{(0,93x + 0,03)^2} = \frac{0,0288}{(0,93x + 0,03)^2}$$

2. Pour tout réel $x \in [0;1]$, $(0,93x + 0,03)^2 > 0$ et $0,0288 > 0$ donc $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \in [0;1]$. On en déduit que la fonction f est croissante sur [0;1].

Partie B

1.



2. $P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = x \times 0{,}96$. On a bien : $P(D \cap T) = 0{,}96x$.

3. D'après la formule des probabilités totales, les événements D et $\overline{D}$ formant une partition de l'univers, on a :
$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) = 0{,}96x + 0{,}03(1 - x)$.
Donc $P(T) = 0{,}96x + 0{,}03 - 0{,}03x = 0{,}93x + 0{,}03$.

4. S'il y a 50 sportifs dopés sur 1000 sportifs testés, alors la probabilité de choisir un sportif dopé dans le groupe est

$$P(D) = \frac{50}{1000} = 0{,}05$$

Or la probabilité que le sportif soit dopé sachant que son test est positif est :

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03} = f(x) \text{ et } x = P(D),$$

donc si $P(D) = 0{,}05$, alors $P_T(D) = f(0{,}05)$.
On calcule : $f(0{,}05) \simeq 0{,}63$.

5. a. On résout l'inéquation : $f(x) \geq 0{,}9$ pour tout réel $x \in [0;1]$:

$$f(x) \geq 0{,}9 \iff \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03} \geq 0{,}9$$

$\iff 0{,}96x \geq 0{,}9\,(0{,}93x + 0{,}03)$ car $0{,}93x + 0{,}03 > 0$ pour tout réel $x \in [0;1]$

$$\iff 0{,}96x \geq 0{,}837x + 0{,}027 \iff 0{,}123x \geq 0{,}027 \iff x \geq \frac{0{,}027}{0{,}123} \iff x \geq \frac{9}{41}.$$

Or $\frac{9}{41} \simeq 0{,}22$ donc la valeur prédictive du test est supérieure ou égale à 0,9 à partir de $x = 0{,}22$ environ.

b. En ne testant que les sportifs ayant le plus de chances d'être dopés, la valeur de x augmente, car elle représente la probabilité que le sportif choisit soit dopé. Comme la fonction f est croissante sur [0;1], la valeur prédictive du test va augmenter aussi.

Exercice 2

1. a. Pour tout réel $x \in [0;1]$, $f(x) = x \Longleftrightarrow 2xe^{-x} = x \Longleftrightarrow (2e^{-x}-1)\,x = 0$

donc $f(x) = x \Longleftrightarrow 2e^{-x} - 1 = 0$ ou $x = 0 \Longleftrightarrow e^{-x} = \dfrac{1}{2}$ ou $x = 0$

$\Longleftrightarrow -x = ln(\dfrac{1}{2})$ ou $x = 0 \Longleftrightarrow x = -ln(\dfrac{1}{2})$ ou $x = 0$

$\Longleftrightarrow x = -(ln(1) - ln(2))$ ou $x = 0 \Longleftrightarrow x = ln(2)$ ou $x = 0$.
Comme $ln(2) \simeq 0,69$, l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions dans l'intervalle [0;1]. L'ensemble des solutions sur [0; 1] est $\{ln(2); 0\}$.

b. Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $u(x)=2x$, $v(x) = e^{-x}$. Alors pour tout réel $x \in [0;1]$, $u'(x) = 2$, $v'(x) = -e^{-x}$
On a donc : $f'(x) = 2e^{-x} + 2x \times (-e^{-x}) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} = 2(1 - x)\, e^{-x}$.

c. Pour tout réel $x \in [0;1]$, $1 - x \geq 0$ et $e^{-x} > 0$, donc $f'(x) \geq 0$. On en déduit le tableau de variations de f sur [0;1] :

x	0	1
$f'(x)$	+	
Variations f	0 ↗	$2/e$

On a calculé : $f(0) = 2 \times 0 \times e^{0} = 0$ et $f(1) = 2 \times 1 \times e^{-1} = \dfrac{2}{e}$.

2. a. Initialisation : $u_0 = 0,1$ et $u_1 = f(0,1) \simeq 0,18$ donc $0 \leq u_0 < u_1 \leq 1$.
Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.
Comme la fonction f est croissante sur [0;1], on a :
$f(0) \leq f(u_n) < f(u_{n+1}) \leq f(1)$.
Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 2e^{-1} < 1$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$.
Donc $0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq 1$. La propriété est héréditaire.
Conclusion : La propriété $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$ est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

b. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante (car $u_n < u_{n+1}$)et majorée par 1 (car u_{n+1} 1), donc elle converge.

3. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par u_0 = 0,1 et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$, où f est une fonction continue.
On a vu que cette suite est convergente vers un réel L.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = L$
On a $u_{n+1} = f(u_n) \Leftrightarrow u_{n+1} = 2 \times u_n \times e^{-u_n}$
Quand $n \to +\infty$, l'égalité devient :
$L = 2Le^{-L} \Leftrightarrow \frac{L}{2L} = e^{-L} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-L} \Leftrightarrow ln\left(\frac{1}{2}\right) = -L \Leftrightarrow L = -ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \; L = ln(2)$

4 .a. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante et converge vers ln(2). Donc pour tout $n \geq 0$, $u_n < ln(2) \Leftrightarrow 0 < ln(2) - u_{jn'}$,
ce qui équivaut à $ln(2) - u_n > 0$.

b. def seuil() :
```
    n=0
    u=0,1
    while ln(2) - u > 0,0001 :
        n=n+1
        u=2ue-u
    return(u,n)
```

c. On obtient n = 11.

Exercice 3

1. Soit y(x)=k donc y'(x) =0
si y(x) est solution de (E_0)
alors $y'(x) = y(x) \Leftrightarrow k = 0$.
Donc l'unique fonction constante solution de (E_0) est la fonction nulle : y(x) = 0.

2. Une solution particulière de l'équation différentielle E_0 étant la fonction nulle, l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions de la forme $f(x) = Ce^x$, où C est un nombre réel.

3. Pour tout réel x, $h'(x) = -2sin(x) + cos(x)$ et

$h(x) - cos(x) - 3sin(x) = 2cos(x) + sin(x) - cos(x) - 3sin(x) = -2sin(x) + cos(x) = h'(x)$.
Pour tout réel x, $h'(x) = h(x) - cos(x) - 3sin(x)$, donc h est solution de l'équation différentielle E.

4. f solution de $(E) \Longleftrightarrow f' = f - cos(x) - 3sin(x)$,
$\Longleftrightarrow f' - h' = f - cos(x) -3sin(x) - h' \Longleftrightarrow f' - h' = f - cos(x) - 3sin(x) - (-2sin(x) + cos(x))$
$\Longleftrightarrow f' - h' = f - cos(x) -3sin(x) + 2sin(x) - cos(x) \Longleftrightarrow f' - h' = f - 2cos(x) - sin(x)$
$\Longleftrightarrow f' - h' = f - (2cos(x) + sin(x)) \Longleftrightarrow f' - h' = f - h$
$\Longleftrightarrow (f - h)' = f - h$
$\Longleftrightarrow f - h$ est solution de (E_0)
Donc f solution de $(E) \Longleftrightarrow f - h$ est solution de (E_0)

5. On a f solution de $(E) \Longleftrightarrow f - h$ est solution de (E_0)
$\Longleftrightarrow f - h = Ce^x \Longleftrightarrow f(x) = Ce^x + h = Ce^x + 2cos(x) + sin(x)$
L'ensemble des solutions de E est donc l'ensemble des fonctions de la forme $h + Ce^x$, où C est un nombre réel : il s'écrit
$\{x \longrightarrow 2cos(x)+sin(x) + Ce^x;\ C \in \mathbb{R}\}$

6. Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = 2cos(x) + sin(x)+Ce^x$ où C est une constante telle que $g(0) = 0$.
$g(0)=0 \Longleftrightarrow 2cos(0) + sin(0) + Ce^0 = 0 \Longleftrightarrow 2 + 0 + C \times 1 = 0 \Longleftrightarrow 2 + C = 0 \Longleftrightarrow C = -2$.
Ainsi, la solution cherchée est la fonction g, définie par $g(x)=2cos(x)+sin(x)-2e^x$.

7. Une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est la fonction définie par $G(x) = 2sin(x) - cos(x)-2e^x$. Donc
$\int_0^{\pi/2} g(x)\,dx = [2sin(x) - cos(x)-2e^x]_0^{\pi/2} = (2 - 0 - 2e^{\pi/2}) - (0 - 1 - 2) = 5 - 2e^{\pi/2}$.

Exercice 4

1. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$AB \neq k \times AC$, avec $k \in R$
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est dans le plan (O, x, y) mais ce n'est pas le cas du vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc ils ne sont pas colinéaires.

2. a. On calcule les produits scalaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ avec le vecteur $\vec{n}$:

$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 1 \times 1 + 3 \times 3 - 2 \times 5 = 1 + 9 - 10 = 0$donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux,

$\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 3 \times 1 - 1 \times 3 + 0 \times 5 = 3 - 3 + 0 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc normal au plan (ABC).

b. Le plan (ABC) admet donc une équation cartésienne de la forme $x + 3y + 5z + d = 0$, où d est un nombre réel.
Comme $A(-2; 0; 2) \in (ABC)$, on a : $-2 + 0 + 5 \times 2 + d = 0$, donc $-2 + 10 + d = 0$, d'où $8 + d = 0$ et $d = 8$.
Une équation cartésienne de (ABC) est donc $x + 3y + 5z - 8 = 0$.

c. On introduit les coordonnées de D dans cette équation :
$0 + 0 + 5 \times 3 - 8 = 15 - 8 = 7$. Le résultat étant non nul, on en déduit que le point D n'appartient pas au plan (ABC).
Et donc que les A, B, C et D ne sont pas coplanaires

3. a. En choisissant t = 0 dans la représentation paramétrique de D_1, on obtient :
$x = 0$, $y = 0$, $z = 3$. Ce sont les coordonnées de D, donc $D \in D_1$.
De plus, d'après cette représentation paramétrique, un vecteur directeur de D_1 est le vecteur $\vec{n}$, donc D_1 est orthogonale au plan (ABC).
D_1 est bien la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

b. On résout le système : $\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3t = -1 - 5s \\ 3 + 5t = 2 - 6s \end{cases}$ $\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3 + 9s = -1 - 5s \\ 1 + 5t = 2 - 6s \end{cases}$

$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ s = -\dfrac{2}{7} \\ 1 + 5t = -6s \end{cases} \quad \begin{cases} t = 1 - \dfrac{6}{7} \\ s = -\dfrac{2}{7} \\ 1 + 5t = \dfrac{12}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} t = \dfrac{1}{7} \\ s = -\dfrac{2}{7} \\ 1 + 5 \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{12}{7} \end{cases}$$

La dernière équation est vérifiée, donc il y a bien un point d'intersection, défini par

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = 3 \times \frac{1}{7} \\ z = 3 + 5 \times \frac{1}{7} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = \frac{3}{7} \\ z = \frac{26}{7} \end{cases}$$

Les droites D_1 et D_2 sont sécantes au point de coordonnées $\left(\frac{1}{7} ; \frac{3}{7} ; \frac{26}{7}\right)$.

4. a. On cherche le point d'intersection de la droite D_1 avec le plan (ABC) : il vérifie $x + 3y + 5z - 8 = 0$; $x = t$; $y = 3t$; $z = 3 + 5t$.
Ainsi, on a : $t + 9t + 15 + 25t - 8 = 0$, soit $35t + 7 = 0$, d'où $t = \frac{-1}{5}$.
On en déduit $x = \frac{-1}{5}$; $y = \frac{-3}{5}$; $z = 3 + 5 \times \frac{-1}{5} = 2$.

Les coordonnées de H sont donc $H\left(\frac{-1}{5} ; \frac{-3}{5} ; 2\right)$.

b. Le vecteur $\overrightarrow{HD}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc la distance du point D au plan (ABC) est :

$$HD = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25} + 1} = \sqrt{\frac{35}{25}} = \sqrt{\frac{7}{5}} \simeq 1{,}18.$$

Soit y(x)=k donc y'(x) =0
si y(x) est solution de (E0)
alors y'(x) = y(x) k=0.
Donc l'unique fonction constante solution de (E0) est la fonction nulle : y(x) = 0.