digiSchool Éducation

SUJET DE SPÉ. MATHÉMATIQUES BAC GÉNÉRAL 2024 MÉTROPOLE

Exercice 1

Affirmation 1 : VRAIE

Étudions la limite de f en $+\infty$

$f(x) = 5\frac{x}{e^x}$

Or d'après le théorème des croissances comparées apprise en cours : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

On a la limite de $f(x)$ qui est égale à un nombre réel en plus l'infini alors la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

Affirmation 2 : VRAIE

Déterminons la dérivée de $f(x)$:

$f(x) = 5xe^{-x} = u(x) \times v(x)$ en posant

$u(x) = 5x$ qui donne $u'(x) = 5$ et

$v(x) = e^{-x}$ qui donne $v'(x) = -e^{-x}$.

Alors $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 5e^{-x} + 5x\,(-e^{-x}) = 5e^{-x} -5xe^{-x}$.

On remplace $f(x)$ et $f'(x)$:
$f'(x) + f(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} + 5xe^{-x} = 5e^{-x}$.
Donc f est bien solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation 3 : FAUX

Contre-exemple : la suite définie par $u_n = (-1)^n$ vérifie la condition $u_n \leq v_n \leq w_n$ *pour tout entier n* mais ne converge pas puisqu'elle prend alternativement les valeurs -1 et 1.

Affirmation 4 : VRAIE

Si (u_n) est croissante alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n$.
Si (w_n) est croissante alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_0 \geq w_n$.
On a alors l'inégalité suivante pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq w_0$.
En particulier, $u_0 \leq v_n \leq w_0$.