

SUJET DE SPÉ. MATHÉMATIQUES BAC GÉNÉRAL 2024 LIBAN/ALGÉRIE

Exercice 1

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;1]$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout réel $x \in [0;1]$, on note $u(x) = 0,96x$ et $v(x) = 0,93x + 0,03$.

Alors $u'(x) = 0,96$ et $v'(x) = 0,93$.

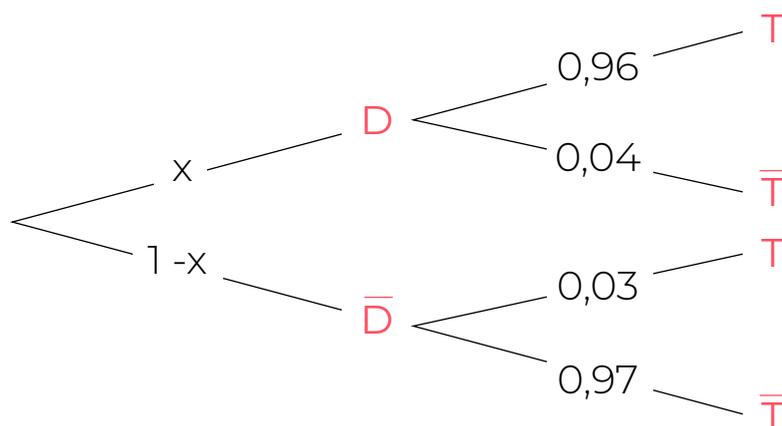
Donc, pour tout réel $x \in [0;1]$, $f'(x) = \frac{0,96 \times (0,93x + 0,03) - 0,96x \times 0,93}{(0,93x + 0,03)^2}$

$$f'(x) = \frac{0,96 \times 0,93x + 0,0288 - 0,96x \times 0,93 \times x}{(0,93x + 0,03)^2} = \frac{0,0288}{(0,93x + 0,03)^2}$$

2. Pour tout réel $x \in [0;1]$, $(0,93x + 0,03)^2 > 0$ et $0,0288 > 0$ donc $f'(x) > 0$ pour tout réel $x \in [0;1]$. On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0;1]$.

Partie B

1.



2. $P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = x \times 0,96$. On a bien : $P(D \cap T) = 0,96x$.

3. D'après la formule des probabilités totales, les événements D et \bar{D} formant une partition de l'univers, on a :
 $P(T) = P(D \cap T) + P(\bar{D} \cap T) = 0,96x + 0,03(1 - x)$.
Donc $P(T) = 0,96x + 0,03 - 0,03x = 0,93x + 0,03$.

4. S'il y a 50 sportifs dopés sur 1 000 sportifs testés, alors la probabilité de choisir un sportif dopé dans le groupe est

$$P(D) = \frac{50}{1000} = 0,05$$

Or la probabilité que le sportif soit dopé sachant que son test est positif est :

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,96x}{0,93x + 0,03} = f(x) \text{ et } x = P(D),$$

donc si $P(D) = 0,05$, alors $P_T(D) = f(0,05)$.
On calcule : $f(0,05) \approx 0,63$.

5. a. On résout l'inéquation : $f(x) \geq 0,9$ pour tout réel $x \in [0;1]$:

$$f(x) \geq 0,9 \iff \frac{0,96x}{0,93x + 0,03} \geq 0,9.$$

$$\iff 0,96x \geq 0,9(0,93x + 0,03) \text{ car } 0,93x + 0,03 > 0 \text{ pour tout réel } x \in [0;1]$$

$$\iff 0,96x \geq 0,837x + 0,027 \iff 0,123x \geq 0,027 \iff x \geq \frac{0,027}{0,123} \iff x \geq \frac{9}{41}.$$

Or $\frac{9}{41} \approx 0,22$ donc la valeur prédictive du test est supérieure ou égale à 0,9 à partir de $x = 0,22$ environ.

b. En ne testant que les sportifs ayant le plus de chances d'être dopés, la valeur de x augmente, car elle représente la probabilité que le sportif choisit soit dopé. Comme la fonction f est croissante sur $[0;1]$, la valeur prédictive du test va augmenter aussi.